最大调整时间最小的物资调配模型

刘春草, 徐寅峰, 朱志军

(西安交通大学 管理学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 在考虑各个库存中心风险的基础上, 如何来调拨各个库存中心的物资来满足一个商店的供货需求, 同时使得最大调整时间最小, 并保证库存中心缺货风险最小。通过分析任意点对之间字典序下最大权最小路径和最小生成树之间的关系, 给出了解决上述问题的有效算法。

关 键 词: 最小生成树; 最大权最小路径; 最大调整时间最小; 缺货风险

中图分类号: C931.1　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-274X(2003)02-0241-04

对于一个生产厂家, 它的营销体系可能遍布整个中国。通常来说厂商总会在一些销售量比较大的需求地建立库存中心, 如果商店里发生商品脱销的情况, 厂商往往会从有库存商品的和距离最近的库存中心调拨存货来满足当地的过热需求。但是, 从全局来看这并非是最好的决策。因为, 每个库存中心所面临的市场是不同的, 有的市场商品脱销快而有的地方可能商品会有所积压。如果我们仅仅从距离远近来判断从哪个库存中心来调拨物资, 这就有可能过于依靠某个库存中心, 使得这个库存中心货物供给不足, 从而严重地影响整个销售工作的顺利进行[1,2]。

另一个典型的例子就是战争物资的调配。在发生战争的时期, 物资的有效供应及物资的供应时间就显得尤为重要, 运输费用倒显得不那么重要。在这种情况下, 我们就必须认真考虑每个库存中心所面临的缺货风险。在此基础上, 考虑当一个新的要货需求来临时, 调配哪一个库存中心的货物来满足要求。同时, 又从哪些库存中心调货来补充这个库存中心的存货, 最终使得在下一个需求来到之前, 库存中心所面临的风险最小且调整时间最短。从整体来看, 就是如何来通盘考虑全部的库存中心, 在保证缺货风险最小的基础上最大调整时间最小。

相应的, 我们可以将上述问题表述如下: 给定一个边的权重为正的简单连通图 G, $|G| = n$。其中, 有 k 个点是库存中心, 其他点为商品的分销点。假设在时间 t, 点 V_{i+1} 发生商品脱销, 亟需一批商品来满足顾客的需求。由于 k 个库存中心都有一个点的权重来表示库存中心发生缺货情况下的风险, 并随着需求点的不同而变化。我们需要解决的就是如何来调拨各个库存中心的库存量以最短的时间来满足 V_{i+1} 需求, 并使得库存中心缺货风险最低[3,4]。

对于任意一个权重为正的图 G, 本文的问题就是寻找任意一对顶点 (S, T) 字典序下的最大权最小路径。与最短路径不同的是, 最短路径问题在最近 20 年里讨论得很多, 相反此问题尚无任何研究结果。

对于一对顶点 (S, T) 字典序下的最大权最小路径, 我们可以用一个实际例子来理解。假设在足球场上, 11 个队员都有自己一定的防守区域。往往当足球进入一个区域后(假设为 A), 总会有一个离它最近的球员去防守, 其他球员会同时各自调整他们之间各自的位置, 进行补位或协防, 总使得空出来的其他关键防守区域有队员进行防守, 最终空出来的是风险最低的防守区域(假设为 B)。如果队员们在最短时间内调整完毕, 那么所有队员运动路线就为 $A - B$ 的一条字典序下的最大权最小路径。

本文首先分析了字典序下的最大权最小路径与最小生成树之间的密切关系, 尔后给出找一对顶点及所有顶点之间最大权最小路径的有效算法。在此基础上, 给出了研究结果在最大调整时间最小物资调配模型中的一个应用。在最后一部分, 我们给出了

收稿日期: 2002-12-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(7980004)

作者简介: 刘春草(1970-), 女, 湖南茶陵人, 西安交通大学博士生, 从事管理科学与工程研究。

下一步要研究的问题和方向。

1　最小生成树与字典序下最大权最小路径

我们用 G 表示 n 个点的加权图, 其中 V 为顶点的集合, E 为边的集合, $|G| = n$, 边 (U, V) 的权重用 $d(U, V)$ 表示, 边的权重满足三角不等式, 即对于 $U, V, W \in V$, 边之间的权重满足 $d(U, V) + d(V, W) \geq d(U, W)$, 且图为对称图。

对于任意一对点 (S, T), 令 $L(S, T)$ 表示顶点 S 和 T 之间最大权最小路径上所有边的集合, 让 $L(G)$ 表示所有 $L(S, T)$ 的并集, 即 $L(G) = \bigcup_{S, T \in V} L(S, T)$。因此, 有以下结果成立:

定义 1　对于一对顶点 S 和 T, 如果我们用 $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 表示这对顶点之间路径的集合, $T_i = \max\{p_i\}$ 表示第 p_i 条路径中边的最大权重, 则可以用 $P = \min_{P_i \in P} \max\{P_i\}$ 表示这对顶点字典序下最大权最小路径。

定理 1　如果图 G 的最小生成树用 $MST(G)$ 表示, 则应有 $MST(G) = L(G)$。

证　明　不失一般性, 假设图 G 中没有两条边的权重一样。很显然, 所有最大权最小的路径边的并集不含圈, 因为如果含有圈, 则在圈中权重最大的边一定不会出现在任何最大权最小的路径上。

如果 e 是用贪婪算法得到 $MST(G)$ 的一条边, 且 e 的两个端点为 U 和 V, 则从 U 到 V 的最大权最小的路径就是 e。因为, 如果 e 不是从 U 到 V 的最大权最小的路径, 则一定存在从 U 到 V 的最大权最小的路径, 且路径上的每条边的权重都小于边 e 的权重。这和 e 是 $MST(G)$ 中的一条边相矛盾。

综合可知, 上述定理成立。证毕。

2　算法设计与分析

一个图中任意一对顶点字典序下的最大权最小路径算法为:

通过对定理 1 和定理 2 的证明, 我们找出了图 G 最小生成树和字典序下最大权最小路径之间的关系。因此, 找出任意两个顶点 S 和 T 之间的字典序下的最大权最小路径的有效算法, 可以表示如下:

首先, 我们把图 G 中的边按权重排序, 找出图 G 的最小生成树。因为 $MST(G)$ 中点 S 和 T 之间的路径是一定的, 所以我们可以在线性时间内找到这条路径。根据定理 1, 知道这条路径就是 S, T 之间的字典序下最大权最小路径。因此有如下定理成立。

定理 2　如果 G 是一个加权连通图, 则对于任意一对顶点 (S, T), 可以在 $O(|E| \log n)$ 时间内找到字典序下的最大权最小路径。

推论 1　如果 G 是一个加权连通图, 且最小生成树已知, 则对于任何一对顶点 (S, T), 可以在 $O(n)$ 时间内找到它们之间的字典序下的最大权最小路径。

求一个图中任意点对之间字典序下最大权最小路径的算法, 可以很简单地推广到求所有顶点对之间的字典序下的最大权最小路径。显然, 我们可以证明以下定理和推论成立。

定理 3　如果 G 是一个加权连通图, 则所有顶点对之间的字典序下的最大权最小路径可以在 $O(|E| \log n)$ 时间内求得。

推论 2　如果 G 是一个加权连通图, 且最小生成树已知, 则所有顶点对之间的字典序下的最大权最小路径可以在 $O(n^2)$ 时间内求得。

3　最大权最小路径在最大调整时间最小物资调配模型中的运用

最大调整时间最小物资调配问题研究的是分布在图 G 上的 k 个物资库存中心, 在分布图 G 上 $n - k$ 个点的商品分销点发生商品脱销的情况下, 如何来迅速调拨物资, 使得既满足顾客过剩的商品需求又能让缺货风险最小。模型化上述问题如下:

令图 G 是权为正的简单连通图, 图 G 上有 k 个物资库存中心。为了不失一般性, 我们假设没有两个库存中心占据同一个点。在此问题中, 每个库存中心都有一个正的权重来表示这个库存中心的缺货风险。让 $V(k)$ 表示 k 个库存中心所占据点的集合, V_{i+1} 表示第 $i+1$ 个需求点。现在的问题就是如何在这些库存中心调拨商品, 来使得商品所占据点的状态为 $(V(k) - V^*) \cup V_{i+1}$。其中, V^* 表示在 k 个库存中心中缺货风险最小的点。货物总共所走的路径为字典序下的最大权最小路径。

定理 4　对于原来图 G 中没有出现在 $MST(G)$ 中的边(例如 e_3), 在一个新的需求来到后, 这些对应的边同样不会出现在新的 $MST'(G)$ 中。

证　明　因为对于一个完全图, 任何两点之间都有连线, 因此可以把整个完全图看成由多个三角形所组成。现在, 我们以一个简单的完全图来证明上述定理成立。假设有如下完全图 G (图 1), 且其最小生成树为图 2。

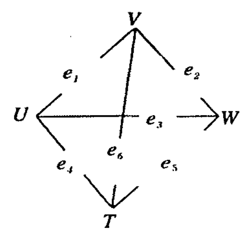

图 1　完全图

Fig.1　Complete graph

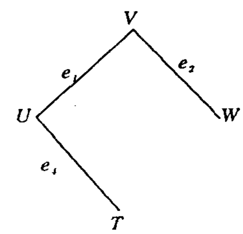

图 2　最小生成树

Fig.2　Minimum spanning tree graph

假设完全图 G 中, $e_1 < e_2 < e_3 < e_4 < e_5 < e_6$。

现假设来了一个新的需求点后, 在新的 $MST'(G)$ 中一条新边 e_3 加了进来, 因为对于三角形 ΔUVW 没有产生圈, 这不外乎有两种情况: ① 对于三角形 ΔUVW, 只有 e_3 在新的 $MST'(G)$ 中; ② 对于三角形 ΔUVW, 有 e_3 和 e_1, e_2 之中的一条边在新的 $MST'(G)$ 中。下面, 我们证明这两种情况都不可能出现。

对于 ① 考虑在加入 e_3 之前的情况: 因为 e_1 不在新的 $MST'(G)$ 中, 也就是说在加入 e_1 后会产生圈, 所以在新的 $MST'(G)$ 中存在一条从 U 到 V 的路径。同样, 对于 e_2 在新的 $MST'(G)$ 中原来就存在一条从 V 到 W 的路径。这样, 在新的 $MST'(G)$ 中既存在一条从 U 到 V 的路径, 又存在一条从 V 到 W 的路径, 显然也存在一条从 U 到 W 的路径。如果加入 e_3, 在新的 $MST'(G)$ 中会产生圈, 因此对于 ① 这种情况不可能成立。

对于 ②, 我们假设 e_3 和 e_1 在新的 $MST'(G)$ 中。因为 e_2 不在新的 $MST'(G)$ 中, 也就是说, 加入边 e_2 后会产生圈, 即在新的 $MST'(G)$ 中存在一条从 V 到 W 的路径。因为, 我们知道在树中任何两点之间只有惟一的一条路径, 而 e_3 和 e_1 在新的 $MST'(G)$ 中, 所以这条路径就是 (e_1, e_3)。显然, 我们可以用边 e_2 替换边 e_3, 保持了树的连通性, 无圈且树的权重变小了。因此, ② 这种情况同样不成立。

依照上面的分析, 我们同样可以证明在一个新的需求点来到后, e_5, e_6 不会出现在新的 $MST'(G)$ 中。证毕。

下面, 我们将介绍如何用上面所得到的结论来处理这个问题。根据问题的特殊性, 我们知道由于 k 个库存中心是固定不变的, 所以他们之间的最短距离也是一定的。因此, 我们没有必要在每次有一个新需求 V_{i+1} 时重新求 $V(k) \cup V_{i+1}$ 的完全图 $G_k(i)$, 因为我们完全可以通过上次得到的 k 个库存中心, 以及它们之间边的信息来迅速得到新的 $MST(G_k(i))$。具体算法描述如下:

首先, 需要对原有图 G 和数据进行预处理。由于 k 个库存中心一定, 可以先求出对于 $V(k)$ 中的任意一对顶点, 找到它们之间的最短距离并将其作为两点之间的一条边。由此, 构造一个 $V(k)$ 的完全图 G_k, 和图 G 中任意两点之间的最短距离, 这些可以在 $O(n^3)$ 时间内完成。然后, 将完全图 G_k 的边按照权重的大小进行排序, 运用 Greedy 算法求出完全图 G_k 的最小生成树。由于完全图 G_k 的边数为 $n_e = k(k-1)$, 所以完成这需要花费时间 $O(k^2 \log k)$。对于每次来了一个新的需求后, 主要算法过程描述如下:

1) 从 $V(k)$ 中找到最小权重的点。

2) 对于每一个新的需求点 V_{i+1}, 首先求出它到 $V(k)$ 中任意一个顶点之间的距离, 并将其作为这两点之间的一条边, 由此构造一个 $V(k) \cup V_{i+1}$ 的完全图 $G_k(i)$。

3) 找出 $MST(G_k(i))$: ① 求出 $V(k)$ 中每个顶点到 V_{i+1} 的最短距离; ② 将这些边按从小到大进行排序 $e_1 < e_2 < e_3 \cdots < e_k$; ③ 从这些边中选出权重最小的一条边 e 加入 G_k 的最小生成树 $MST(G_k)$ 中, 生成新生成树 $MST(G_k(i))$; ④ 根据定理 4, 我们知道 $MST(G_k(i))$ 便是要求的加入新需求的最小生成树。

4) 找出 $V(k)$ 中找到的最小权重的点到 V_{i+1} 的最大权最小路径

定理 5　最大调整时间最小问题, 用上述算法可以在 $O(k \log k)$ 时间内解决。

证　明　对于步骤 1), 可以在 $O(n)$ 时间内找到权重最小的点。

对于步骤2),由于在预处理的过程中已经求得了任意一对顶点的最短距离,所以同样可以在$O(n)$时间内完成。

对于步骤3),运用贪婪算法来求图的最小生成树。其主要分析如下:对于①,具体来说由于事先已经求出了任意两点之间的最短距离,我们可以在$O(n)$时间内找到$V(k)$中每个顶点到V_{i+1}的最短距离,组合成一个新的有序表,算法的时间复杂性是$O(k\log k)$[5]。对于②,可以在$O(k\log k)$时间内完成排序,判断加入e会不会形成圈,这可用“Union-Find”算法[6]。开始是每个顶点自身构成一个子集,设$e=(V_i,V_j)$加到T中,首先找出V_i,V_j所在的集合,然后将这两个集合合并成一个集合。万一发现V_i,V_j所在的集合是同一个集合,这表明e加入T中将产生圈。由于“Union-Find”算法的时间复杂性几乎是线性的,因而整个算法复杂性是$O(k\log k)$,所以完成步骤3)的时间复杂性为$O(k\log k)$。

对于步骤4),由推论1可知它可在$O(n)$时间内完成。

由以上分析可知,最大调整时间最小问题用上述算法可以在$O(k\log k)$时间内解决。

4 结束语

通常来说,如果商店里发生商品脱销的情况,厂商往往会从有库存商品的和距离最近的库存中心调拨存货来满足当地的过热需求,但这并非是最好的决策。因为,这并没有考虑每个库存中心缺货的风险是不同的。本文正是从此出发,考虑了每个库存中心缺货的风险不同的情况下,如何来统筹调拨物资来使得最大调整时间最小,同时保证缺货风险最小。

文章首先分析了字典序下最大权最小路径与最小路径树的密切关系,在此基础上得到了字典序下最大权最小路径的算法,并分析了此算法的时间复杂性。在文章最后一部分,通过具体问题的提出,结合上面所得到的结论,构造了k个库存中心的最大调整时间最小的算法,并证明了此算法的时间复杂度为$O(k\log k)$。对于本文所考虑的问题,有许多待进一步深入研究的理论问题,如对于一个事先并不知道的需求序列和风险分布的情况,所有的信息是逐步知道时(即对应的On-line问题),我们如何构造和解决这个问题,这将是下一步将要研究的方向和问题。

参考文献:

[1] BEN-DAVID S, BORODIN A. A new measure for the study of on-line algorithms [J]. Algorithmica, 1994, (11): 73-91.

[2] CHROBAK M, LARMORE L L. An optimal on-line algorithm for k-servers on trees [J]. SIAM J Comput, 1991, 20 (1): 144-148.

[3] RAM GANESHAN. Managing supply chain inventories: A multiple retailer, one warehouse, multiple supplier model [J]. International Journal of Production Economics, 1999, 59 (1~3): 341-354.

[4] JAYARAMAN, VAIDYANATHAN, PIRKUL HASAN. Planning and coordination of production and distribution facilities for multiple commodities [J]. European Journal of Operational Research, 2001, 133 (2): 394-408.

[5] YAN Wei-min, WU Wei-min. Data Structure [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997. 283-284.

[6] 郁松年,邱伟德 组合数学[M]. 北京:国防工业出版社, 2000.

(编 辑 姚 远)

The minmum adjustment time of material preparing model

LIU Chun-cao, XU Yin-feng, ZHU Zhi-jun

(College of Management, Xi′an Jiaotong University, Xi′an 710048, China)

Abstract: A problem of how to prepare the materials to meet the needs of stores and guarantee the max adjustment time is minimal and the risk out of stock is lowest when different stock risks are proposed. Through analyzing the relationship between lexicographical Minmax path and the minimum spanning tree of a given graph, the solvable algorithms is presented.

Key wrods: the minimum spanning tree; the minmax path; the minmax adjustment time; risk out of stock