收益率为模糊数的加权证券组合选择模型①

徐维军[1]，徐寅峰[1,2]，王　迅[1]，张卫国[1]
(1. 西安交通大学管理学院，陕西 西安 710049；
2. 西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室，陕西 西安 710049)

摘要：Markowitz 基于概率理论建立了有名的均值方差证券组合模型，文章则基于模糊理论建立了一类具有权系数的均值方差证券组合模型. 首先对证券市场上的收益与风险特性重新进行度量和刻画，提出了一类新的具有加权的可能性均值、方差及协方差的概念，类似于概率论中均值方差的分析讨论了这些概念的性质. 其次基于该文定义的均值方差，建立了以收益率为模糊数的加权可能性证券组合投资模型，并给出了相应的加权可能性有效证券组合及有效前沿概念. 通过求解两个相对应的优化模型得到了一个具有带状投资区域的有效前沿. 尤其当资产收益率具有线性或分段线性隶属函数的模糊数时，该证券组合选择模型实质上为一个线性规划问题，因此有效前沿可化为一个具有折线段的带状投资区域.

关键词：模糊数；可能性原理；证券组合选择；有效证券组合；有效前沿
中图分类号：F830　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000 - 5781(2005)01 - 0006 - 06

Weighted portfolio selection for return rate with fuzzy number

XU Wei-jun[1]，XU Yin-feng[1,2]，WANG Xun[1]，ZHANG Wei-guo[1]
(1. School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;
2. The State Key Lab for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Markowitz proposes the famous mean-variance model based on probability theory, while a class of weight coefficient mean-variance model in this paper is developed based on fuzzy theory. Firstly, we reconsider the characteristics of return rate and risk in security market, and define the new notions of the weighted possibilistic mean values and variances and covariances. These notions' properties are discussed on a similar manner as mean and variance in probability theory. Secondly, the weighted possibilistic portfolio models are presented on them. We also introduce the conceptions of the weighted possibilistic efficient portfolios and efficient frontiers. Moreover, the efficient frontier like a band shape is given out by calculating two relatively optimal models. Especially, when return rates of assets are fuzzy numbers with linear or segmented linear membership functions, the portfolio model is in fact a linear programming problem. Then its efficient frontier is the investment region like a band shape with linear segments.

Key words: fuzzy number; possibilistic theory; portfolio selection; efficient portfolio; efficient frontier

0　引　言

Markowitz 提出的均值 - 方差模型已成为现代证券组合理论发展的重要基石，该模型的基本原理是以证券组合的期望收益率作为投资收益，以期望收益率的方差作为投资风险. 但是这一方法论有着许多局限性，第一，刻画这一模型本身就必须估计收益率的概率分布. 事实上，在许多情

① 收稿日期：2004 - 05 - 19；修订日期：2004 - 12 - 22.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10371094)；国家自然科学基金资助项目(70401006)；中国博士后科学基金资助项目(2003034014).

形下，更容易去估计证券收益率的可能性分布而不是其相应的概率分布．第二，Markowitz 模型基本假设是未来的证券市场发展能够用过去的市场数据反映，也就是说未来证券的均值方差类似于过去．因此在变化莫测的证券市场上很难保证这一假设总是成立的．第三，在一般约束条件下，如相关资产的非负约束，很难获得有效证券组合的精确解[1~3]．第四，在数据分析中，专家或投资者的信息是非常重要的，本文应该通过权函数来反映专家或投资者的信息．无论如何，模糊数对于这些不确定性信息的刻画是一个强有力的工具．本文研究了收益率为模糊数的证券组合选择问题．首先介绍了 Fullér 和 Majlender 定义的一个模糊数的加权的下(上)可能性均值概念．然后在 Fullér 概念基础上，本文定义了新的加权的可能性方差协方差概念，并得到了类似概率论中均值方差概念具有的性质和结论．最后，本文建立了以收益率为模糊数的加权的可能性证券组合选择模型，并给出了加权的下(上)可能性有效证券组合及有效前沿概念．

1　f－加权的可能性均值

1987 年，Dubois 和 Prade 定义了模糊数的一类闭区间值的期望，该期望在模糊数的加法意义上满足加法原理和数乘原理[4]．2001 年，Carlsson 和 Fullér 介绍了模糊数的另一类区间值均值概念，可看作为可能性分布[5]．2003 年，Fullér 和 Majlender 提出了模糊数的一类加权的可能性均值概念，可看作为加权的可能性分布[6]．另外，2003 年，Zhang 考虑了模糊数的另一类下(上)可能性方差及协方差．事实上，Zhang 的这些概念都是基于 Carlsson 和 Fullérs 提出的可能性均值方差概念基础上的进一步扩展[7]．然而本文在 Fullér 和 Majlender 定义了模糊数的一类加权的可能性均值概念的基础上，提出了一类新的加权的下(上)可能性方差及协方差概念．如果权函数取某一特殊的函数时，Zhang 的概念就是本文的特例．

假定模糊数 A 是一个在实线$\mathfrak{R}$上有界支撑隶属函数的模糊集合，该隶属函数具有正态性、模糊凸性及连续性．模糊数族定义为 F．令 $A \in F$ 是一个模糊数，且有$[A]^{\gamma} = [a_1(\gamma), a_2(\gamma)]$，$\gamma \in [0,1]$．这里一个模糊数 A 的 γ－截集定义为：如果 $\gamma > 0$，则$[A]^{\gamma} = \{t \in \mathfrak{R} \mid A(t) \geqslant \gamma\}$．如果 $\gamma = 0$，则$[A]^{\gamma} = \mathrm{cl}\{t \in \mathfrak{R} \mid A(t) > 0\}$（$A$ 的支撑闭）．显然，如果 A 是一个模糊数，则$[A]^{\gamma}$在$\mathfrak{R}$上对所有的 $\gamma \in [0,1]$ 是一个紧的子集．另外，如果说函数 $f:[0,1] \to \mathfrak{R}$ 是一个加权函数，则 f 满足非负性、单调递增性及标准化条件 $\int_0^1 f(\gamma)\mathrm{d}\gamma = 1$.

下面介绍关于 Fullér 和 Majlender 的加权可能性均值定义[6]．

定义 1　模糊数 A 的一类f－加权的上可能性均值和 f－加权的下可能性均值定义为

$$M_f(A) = [M_f^L(A), M_f^U(A)]$$

其中

$$M_f^L(A) = \frac{\int_0^1 a_1(\gamma) f(\mathrm{Pos}[A \leqslant a_1(\gamma)])\mathrm{d}\gamma}{\int_0^1 f(\mathrm{Pos}[A \leqslant a_1(\gamma)])\mathrm{d}\gamma},$$

$$M_f^U(A) = \frac{\int_0^1 a_2(\gamma) f(\mathrm{Pos}[A \geqslant a_2(\gamma)])\mathrm{d}\gamma}{\int_0^1 f(\mathrm{Pos}[A \geqslant a_2(\gamma)])\mathrm{d}\gamma}$$

这里 Pos 定义为可能性，即

$$\mathrm{Pos}[A \leqslant a_1(\gamma)] = \sup_{u \leqslant a_1(\gamma)} A(u) = \gamma,$$

$$\mathrm{Pos}[A \geqslant a_2(\gamma)] = \sup_{u \geqslant a_2(\gamma)} A(u) = \gamma.$$

因此 $M_f^L(A)$ 和 $M_f^U(A)$ 又可写为

$$M_f^L(A) = \int_0^1 f(\gamma) a_1(\gamma)\mathrm{d}\gamma,$$

$$M_f^U(A) = \int_0^1 f(\gamma) a_2(\gamma)\mathrm{d}\gamma$$

则有下面结论成立[6]．

引理 1　若 A 和 B 是两模糊数，则有

$$M_f^L(A+B) = M_f^L(A) + M_f^L(B),$$

$$M_f^U(A+B) = M_f^U(A) + M_f^U(B)$$

这里根据 sup-min 扩展原理定义模糊数的加法[8,9]．

引理 2　若 A 是一模糊数，$\lambda \in \mathfrak{R}$是一个实数，则有

$$M_f(\lambda A) = \begin{cases} [\lambda M_f^L(A), \lambda M_f^U(A)] & \text{如果 } \lambda \geqslant 0, \\ [\lambda M_f^U(A), \lambda M_f^L(A)] & \text{如果 } \lambda < 0 \end{cases}$$

这里根据 sup-min 扩展原理定义模糊数的数乘[8,9]．

2 f – 加权的可能性方差及协方差

基于Fullér和Majlender的加权可能性均值定义，本文提出了一类新的加权的下(上)可能性方差及协方差概念.

定义2 模糊数 $A\in F$ 的加权的上可能性方差与加权的下可能性方差分别定义为

$$\mathrm{Var}_f^L(A)=\frac{\int_0^1[M_f^L(A)-a_1(\gamma)]^2f(\mathrm{Pos}[A\leqslant a_1(\gamma)])\mathrm{d}\gamma}{\int_0^1 f(\mathrm{Pos}[A\leqslant a_1(\gamma)])\mathrm{d}\gamma}$$

$$\mathrm{Var}_f^U(A)=\frac{\int_0^1[M_f^U(A)-a_2(\gamma)]^2f(\mathrm{Pos}[A\geqslant a_2(\gamma)])\mathrm{d}\gamma}{\int_0^1 f(\mathrm{Pos}[A\geqslant a_2(\gamma)])\mathrm{d}\gamma}$$

由Pos定义, $\mathrm{Var}_f^L(A)$ 和 $\mathrm{Var}_f^U(A)$ 式又可写为

$$\mathrm{Var}_f^L(A)=\int_0^1[M_f^L(A)-a_1(\gamma)]^2f(\gamma)\mathrm{d}\gamma,$$

$$\mathrm{Var}_f^U(A)=\int_0^1[M_f^U(A)-a_2(\gamma)]^2f(\gamma)\mathrm{d}\gamma$$

定义3 模糊数 $A([A]^\gamma=[a_1(\gamma),a_2(\gamma)])$ 与模糊数 $B([B]^\gamma=[b_1(\gamma),b_2(\gamma)])(\gamma\in[0,1])$ 的加权的下可能性方差，加权的上可能性方差分别定义为

$$\mathrm{Cov}_f^L(A,B)=\int_0^1[M_f^L(A)-a_1(\gamma)]\cdot[M_f^L(B)-b_1(\gamma)]f(\gamma)\mathrm{d}\gamma$$

$$\mathrm{Cov}_f^U(A,B)=\int_0^1[M_f^U(A)-a_2(\gamma)]\cdot[M_f^U(B)-b_2(\gamma)]f(\gamma)\mathrm{d}\gamma$$

则关于加权的下(上)可能性方差有下面一些重要性质.

定理1 若 A 和 B 是两个模糊数, $\lambda,\mu\in\mathfrak{R}$ 是两实数，则有

$$\mathrm{Var}_f^L(\gamma A+\mu B)=\lambda^2\mathrm{Var}_f^L(A)+\mu^2\mathrm{Var}_f^L(B)+2|\lambda\mu|\mathrm{Cov}_f^L(A,B)$$

$$\mathrm{Var}_f^U(\gamma A+\mu B)=\lambda^2\mathrm{Var}_f^U(A)+\mu^2\mathrm{Var}_f^L(B)+2|\lambda\mu|\mathrm{Cov}_f^U(A,B)$$

这里根据sup – min扩展原理定义模糊数的加法和数乘[8,9].

证明 若 $\lambda<0,\mu<0$,则有

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_f^L(\gamma A+\mu B)&=\int_0^1 f(\gamma)[m_f^L(\lambda A+\mu B)-(\lambda a_1(\gamma)+\mu b_1(\gamma))]^2\mathrm{d}\gamma=\\&\int_0^1 f(\lambda)[\lambda(a_1(\gamma)-M_f^L(A))+\mu(b_1(\gamma)-M_f^L(B))]^2\mathrm{d}\gamma=\\&\lambda^2\mathrm{Var}_f^L(A)+\mu^2\mathrm{Var}_f^L(B)+2\lambda\mu\mathrm{Cov}_f^L(A,B)=\\&\lambda^2\mathrm{Var}_f^L(A)+\mu^2\mathrm{Var}_f^L(B)+2|\lambda\mu|\mathrm{Cov}_f^L(A,B)\end{aligned}$$

类似地，对于情形, $\lambda\geqslant0,\mu\geqslant0$ 结论也成立.

若 $\lambda>0,\mu<0$, 则有

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_f^L(\gamma A+\mu B)&=\mathrm{Var}_f^L(\lambda A)+\mathrm{Var}_f^L(\mu B)+2\mathrm{Cov}_f^L(\lambda A,\mu B)=\\&\lambda^2\mathrm{Var}_f^L(A)+\mu^2\mathrm{Var}_f^L(B)-2\lambda\mu\mathrm{Cov}_f^L(A,B)=\\&\lambda^2\mathrm{Var}_f^L(A)+\mu^2\mathrm{Var}_f^L(B)+2|\lambda\mu|\mathrm{Cov}_f^L(A,B)\end{aligned}$$

类似地，对于情形 $\lambda<0,\mu\geqslant0$,结论也成立. 故第1个结论得证. 同理，第2个结论也成立.

本文考虑定理1的特殊情形，对任意的 $\lambda\in R$, 则有 $\mathrm{Var}_f(\lambda A)=\lambda^2\mathrm{Var}_f(A)$ 和 $\mathrm{Var}_f(A+B)=\mathrm{Var}_f(A)+\mathrm{Var}_f(B)+2\mathrm{Cov}_f(A,B)$ 成立.

定理2 若 $A,B\in F$ 是模糊数, θ 是任意实数. 若对任意的 $x\in\mathfrak{R}$, 恒有 $B(x)=A(x-\theta)$ 成立，则有

$$\mathrm{Var}_f^L(B)=\mathrm{Var}_f^L(A),$$

$$\mathrm{Var}_f^U(B)=\mathrm{Var}_f^U(A)$$

证明 下面分析一个模糊数的方差具有平移不变性. 若 $A\in F$ 是一模糊数, θ 是一实数. 如果 A 被平移 θ, 则本文得到一个新的模糊数 B, 满足性质: 对任意 $x\in\mathfrak{R}$,有 $B(x)=A(x-\theta)$. 也即有

$$[B]^\gamma=[a_1(\gamma)+\theta,a_2(\gamma)+\theta]$$

则有

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_f^L(B)&=\int_0^1[M_f^L(B)-(a_1(\gamma)+\theta)]^2f(\gamma)\mathrm{d}\gamma=\\&\int_0^1\Big[\int_0^1(a_1(\gamma)+\theta)f(\gamma)\mathrm{d}\gamma-(a_1(\gamma)+\theta)\Big]^2f(\gamma)\mathrm{d}\gamma=\\&\int_0^1[M_f^L(A)-a_1(\gamma)]^2f(\gamma)\mathrm{d}\gamma=\mathrm{Var}_f^L(A)\end{aligned}$$

类似地，结论 $\mathrm{Var}_f^U(B)=\mathrm{Var}_f^U(A)$ 也成立. 故定

理得证.

定理 3　若 f 为一加权函数, A, B 和 C 均为模糊数, x, y 均为实数. 则有下面结论成立:

$$Cov_f^L(A,B) = Cov_f^L(B,A),$$
$$Cov_f^U(A,B) = Cov_f^U(B,A)$$
$$Cov_f^L(A,A) = Var_f^L(A),$$
$$Cov_f^U(A,A) = Var_f^U(A)$$
$$Cov_f^L(x,A) = 0, Cov_f^U(x,A) = 0,$$
$$Var_f^L(x) = 0, Var_f^U(x) = 0$$

定理 3 的证明类似定理 1 的第 1 个结论分析.

若 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是 n 个模糊数, 令 $b_{ij*} = Cov_f^L(A_i,A_j)$, $b_{ij}^* = Cov_f^U(A_i,A_j)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$, 则称矩阵

$$\mathbf{Cov}_f^L = \begin{pmatrix} b_{11*} & b_{12*} & \cdots & b_{1n*} \\ b_{21*} & b_{22*} & \cdots & b_{2n*} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1*} & b_{n2*} & \cdots & b_{nn*} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Cov}_f^U = \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* & \cdots & b_{1n}^* \\ b_{21}^* & b_{22}^* & \cdots & b_{2n}^* \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1}^* & b_{n2}^* & \cdots & b_{nn}^* \end{pmatrix}$$

分别为模糊向量 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 的加权的下(上)可能性协方差阵. 则下面结论容易获得.

定理 4　若 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是 n 个模糊数, 则有

(i) $b_{ii*} = \mathrm{Var}_f^L(A_i)$,

$b_{ii}^* = \mathrm{Var}_f^U(A_i)$, $i = 1,2,\cdots,n$

(ii) $b_{ij*} = b_{ji*}$, $b_{ij}^* = b_{ji}^*$, $i, j = 1,2,\cdots,n$,

(iii) 加权的下上可能性协方差阵均为非负定矩阵, 即对任意 $t_i \in R(i = 1,2,\cdots,n)$ 有

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij*} t_i t_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^* t_i t_j \geq 0$$

定理 4 表明加权的下(上)可能性协方差阵与概率论中的协方差阵有着相同的性质.

3　加权的可能性均值 - 方差投资组合模型

假定市场上有 n 种风险资产, 资产 i 的收益率 r_j 为一模糊数, 投资于资产 j 的投资比例为 x_j, 其中, $j = 1,2,\cdots,n$. 为方便描述, 记 $r_j(j = 1,2,\cdots,n)$, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$, $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)'$, $F = (1,1,\cdots,1)'$, $M_f^L = (M_f^L(r_1), M_f^L(r_2), \cdots, M_f^L(r_n))'$, $M_f^U = (M_f^U(r_1), M_f^U(r_2), \cdots, M_f^U(r_n))'$. 则投资组合的收益率为 $r = r'X$, 加权的下可能性均值 $M_f^L(r)$ 及加权的上可能性均值 $M_f^U(r)$ 分别为

$$M_f^L(r) = \sum_{i=1}^n M_f^L(r_i) x_i = M_f^{L\prime} X,$$

$$M_f^U(r) = \sum_{i=1}^n M_f^U(r_i) x_i = M_f^{U\prime} X$$

投资组合收益率 r 的加权的下可能性方差及加权的上可能性方差分别为

$$\mathrm{Var}_f^L(r) = X'\mathrm{Cov}_f^L X,$$
$$\mathrm{Var}_f^U(r) = X'\mathrm{Cov}_f^U X$$

因此, 投资组合的加权的下可能性均值方差模型可描述为

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}\ \mathrm{Var}_f^L(r) = X'\mathrm{Cov}_f^L X \\ &\mathrm{s.t.}\ \ M_f^{L\prime} X \geq \mu, \\ &\qquad F'X = 1, X \geq 0 \end{aligned} \tag{9}$$

其中, μ 为投资者确定的收益率目标. 投资组合的加权的上可能性均值方差模型可描述为

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}\ \mathrm{Var}_f^U(r) = X'\mathrm{Cov}_f^U X \\ &\mathrm{s.t.}\ \ M_f^{U\prime} X \geq \mu, \\ &\qquad F'X = 1, X \geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

这里模型(9) 和(10) 表达式已经化为经典规划问题, 类似于传统 Markowitz 提出的均值 - 方差模型的有效证券组合的性质和概念讨论(如文献[3] 中对该模型的解析分析), 下面也相应得到了一些加权的可能性有效证券组合的性质和概念.

定理 5　若 Cov_f^L 是加权的正定阵, 则模型(9) 的最优解为有效证券组合; 若 Cov_f^U 是加权的正定阵, 则模型(10) 的最优解为有效证券组合.

定义 4　模型(9) 的最优解被称为加权的下可能性有效证券组合; 模型(10) 的最优解被称为加权的上可能性有效证券组合.

定义 5　从模型(9) 中得到的投资曲线被称为加权的下可能性有效前沿; 从模型(10) 中得到的投资曲线被称为加权的上可能性有效前沿.

由于加权的可能性均值方差都是区间数, 因此加权的可能性有效前沿不再是一条投资曲线,

而是一条带状投资区域.

如果本文假定资产收益率 $r_i, i = 1,2,\cdots,n$,是具有线性或分段线性隶属函数的模糊数,令权函数为 $f(\gamma) = (m+1)\gamma^m, m \geq 0$. 资产 i 的收益率 r_i 的 γ-截集定义为 $[r_i]^\gamma = [\alpha_{i1} - (1-\gamma)\alpha_i, \alpha_{i2} + (1+\gamma)\beta_i]$,对任意 $\gamma \in [0,1], i = 1,2,\cdots,n$ 则有

$$M_f^L(r_i) = \alpha_{i1} - \frac{\alpha_i}{m+2},$$

$$M_f^U(r_i) = \alpha_{i2} - \frac{\beta_i}{m+2}$$

$$\mathrm{Var}_f^L(r_i) = \left[\frac{m+1}{m+3} - \left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2\right]\alpha_i^2,$$

$$\mathrm{Var}_f^U(r_i) = \left[\frac{m+1}{m+3} - \left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2\right]\beta_i^2,$$

$$\mathrm{Cov}_f^L(r_i, r_j) = \left[\frac{m+1}{m+3} - \left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2\right]\alpha_i\alpha_j,$$

$$\mathrm{Cov}_f^U(r_i, r_j) = \left[\frac{m+1}{m+3} - \left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2\right]\beta_i\beta_j$$

证券组合的加权的下、上可能性收益均值分别为

$$M_f^L(r) = \sum_{i=1}^n M_f^L(r_i)x_i = \sum_{i=1}^n\left(\alpha_{i1} - \frac{\alpha_i}{m+2}\right)x_i,$$

$$M_f^U(r) = \sum_{i=1}^n M_f^U(r_i)x_i = \sum_{i=1}^n\left(\alpha_{i2} - \frac{\beta_i}{m+2}\right)x_i$$

证券组合的加权的下、上可能性方差分别为

$$\mathrm{Var}_f^L(r) = \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 x_i^2 + \sum_{i \neq j=1}^n \alpha_i\alpha_j x_i x_j\right]\cdot\left[\frac{m+1}{m+3} - \left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2\right]$$

$$\mathrm{Var}_f^U(r) = \left[\sum_{i=1}^n \beta_i^2 x_i^2 + \sum_{i \neq j=1}^n \beta_i\beta_j x_i x_j\right]\cdot\left[\frac{m+1}{m+3} - \left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2\right]$$

因而,证券组合选择的加权的下可能性均值方差模型可描述为

$$\mathrm{Min}\ \mathrm{Var}_f^L(r) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)^2\left[\frac{m+1}{m+3} - \left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2\right]$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^n\left(\alpha_{i1} - \frac{\alpha_i}{m+2}\right)x_i \geq \mu, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1,\cdots,n$$

证券组合选择的加权的上可能性均值方差模型可描述为

$$\mathrm{Min}\ \mathrm{Var}_f^U(r) = \left(\sum_{i=1}^n \beta_i x_i\right)^2\left[\frac{m+1}{m+3} - \left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2\right]$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^n\left(\alpha_{i2} - \frac{\beta_i}{m+2}\right)x_i \geq \mu \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1,\cdots,n$$

进一步,模型(11) 等价于下列线性规划问题

$$\mathrm{Min}\ \mathrm{Var}_f^L(r) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^n\left(\alpha_{i1} - \frac{\alpha_i}{m+2}\right)x_i \geq \mu \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1,\cdots,n$$

模型(12) 等价于下列线性规划问题

$$\mathrm{Min}\ \mathrm{Var}_f^U(r) = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^n\left(\alpha_{i2} + \frac{\beta_i}{m+2}\right)x_i \geq \mu \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1,\cdots,n$$

特别地,如果 $r_i = (a_i, \alpha_i), i = 1,\cdots,n$,是一个对称的三角模糊数,即 $[r_i]^\gamma = [a_i - (1-\gamma)\alpha_i, a_i + (1-\gamma)\alpha_i]$,则

$$M_f^L(r) = \sum_{i=1}^n\left(a_i - \frac{\alpha_i}{m+2}\right)x_i,$$

$$M_f^U(r) = \sum_{i=1}^n\left(a_i + \frac{\alpha_i}{m+2}\right)x_i,$$

$$\mathrm{Var}_f^L(r) = \mathrm{Var}_f^U(r) = \left[\frac{m+1}{m+3} - \left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2\right]\alpha_i^2$$

证券组合选择的加权的下可能性均值方差模型也能够描述为(13). 证券组合选择的加权的上可能性均值方差模型可描述为

$$\mathrm{Min}\ \mathrm{Var}_f^U(r) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^n\left(\alpha_{i2} + \frac{\alpha_i}{m+2}\right)x_i \geq \mu \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1,\cdots,n.$$

由于(13) 和(14) 均为线性模型,因此通过相应算法很容易获得加权的可能性证券组合模型(11) 和(12) 的最优解.

因此本文得到了一个带状有效证券组合投资区域,带状下边缘曲线为加权的下可能性证券组合模型(10) 的有效投资组合曲线,带状上边缘曲线为加权的上可能性证券组合模型(9) 的有效投资组合曲线. 如果资产收益率 r_i 是具有线性或分段

线性隶属函数的模糊数, 则带状上下边缘分别退化为分段直线段相连的有效投资组合曲线, 如模型(13) 和(14) 的有效投资组合曲线. 对于收益率为模糊变量的证券投资组合模型的研究, 无论是国内还是国外都进行了大量的研究, 但他们几乎都是通过应用模糊规划理论转化为一个凸规划或线性规划模型, 最后求出一条有效投资曲线(如文献[10,11]), 类似传统的 Markowitz 提出的均值 - 方差模型(在概率意义上) 的有效投资组合曲线. 近年来也有学者运用主成分分析原理对历史收益数据进行分析估计出收益率的上下可能性分布, 通过建模分析也得到了有效投资组合区域(如文献[12]). 但是在实际投资当中, 投资者往往更注重风险资产的当前收益状态, 并试图对未来走势加以研判. 另外, 在实际操作中, 投资者并不采纳传统模型所研究的有效投资组合策略进行投资, 因而本文的研究试图弥补以上不足之处.

4　结束语

本文以收益率为模糊数, 对证券组合投资的收益风险(均值方差)概念重新度量刻画, 得到了与传统均值方差模型相对应的性质. 加权的可能性证券组合选择模型为投资者提供了一个有效的投资区域, 使得投资者在决策上更加灵活, 具有较强的指导意义. 由于在现实证券市场中, 诸多因素的影响且有些因素难以确切描述具有模糊性, 导致证券的预期收益率和相应的风险往往具有不确定性. 对此, 运用模糊数处理这些不确定性是一个强有力的工具. 同时如果能利用权函数来反映专家掌握的信息与经验, 则显得更为实际, 合理.

参考文献:

[1] Best M J, Hlouskova J. The efficient frontier for bounded assets[J]. Mathematics of Operations Research, 2000, 52: 195—212.

[2] Merton R C. An analytic derivation of the efficient frontier[J]. Journal of Finance and Quantitative Analysis, 1972, 9: 1851—1872.

[3] Vörös J. Portfolio analysis: An analytic derivation of the efficient portfolio frontier[J]. European Journal of Operational Research, 1986, 203: 294—300.

[4] Dubois D, Prade H. The mean value of a fuzzy number[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1987, 24: 279—300.

[5] Carlsson C, Fullér R. On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 122: 315—326.

[6] Fullér R, Majlender P. On weighted possibilistic mean and variance of fuzzy numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 136: 363—374.

[7] Zhang W G, Nie Z K. On possibilistic variance of fuzzy numbers[C]. In Proc. of the 9th International Conference on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing, Lecture Notes in Computer Science, 2003, 2639: 26—29.

[8] Dubois D, Prade H. What are fuzzy rules and how to use them[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 84: 169—185.

[9] Zadeh L A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 100: 9—34.

[10] Inuiguchi M, Ramík J. Possibilistic linear programming: A brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 111: 3—28.

[11] Carlsson C, Fullér R, Majlender P. A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 131: 13—21.

[12] Tanaka H, Guo P, Burhan I. Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 111: 387—397.

作者简介:

徐维军(1975—), 男, 宁夏固原人, 博士生, 研究方向: 金融数学及在线金融算法;

徐寅峰(1962—), 男, 吉林人, 教授, 博士生导师, 研究方向: 调度优化与近似算法;

王　迅(1965—), 男, 河南开封人, 博士生. 研究方向: 金融工程与风险管理;

张卫国(1963—), 男, 陕西安康人, 博士, 教授. 研究方向: 金融数学与金融工程.