有限平面点集强可见点对的 $O(n^2\log n)$ 算法*

徐寅峰
(西安交通大学管理学院，西安 710049)
游兆永
(西安交通大学理学院，西安 710049)

AN $O(N^2$ LOGN) ALGORITHM FOR FINDING ALL STRONGLY VISIBLE PAIRS OF POINTS OF A FINITE PLANAR POINT SET

Xu Yinfeng　　You Zhaoyong
(Xi'an Jiaotong University)

Abstract Let S be a finite planar point set, a pair of points $\{p,q\}$, $p,q\in S$ is called a strongly visible pair of S iff there is no line segment with two endpoints in S that intersects the line segment $L(p,q)$. In this paper, we give an algorithm with $O(n^2\log n)$ time for finding all strongly visible pairs of points of S with some basic techniques in designing algorithms in discrete computational geometry, where $n=|S|$.

Key words strongly visible pair of points, discrete computational geometry, algorithm, computational complexity.

AMS(1991) subject classifications 68Q20, 68U05/CCL 0241, 51A20.

中图法分类号 O24.

1 引　言

计算机图形可见性问题是离散计算几何、计算机图形学、模式识别等研究与应用领域中的一个重要问题[1,2]，关于有限平面点集强可见点对的几何结构以及应用在文献[3]中有较

* 收稿日期：1993—03—26.

详细的论述(在该文中亦称平面点集三角部分的独立线段)，本文针对计算平面有限点集全部强可见点对的算法进行讨论，给出了一个时间复杂度为$O(n^2\log n)$，空间复杂度为$O(n)$的算法．

1 基本引理与算法

令S为一简单平面有限点集(即S中的任三点不共线)，$|S|=n$，$T(S)$为S的一个三角剖分，$J(S)$为S的所有三角剖分的集合，$CH(S)$为S的凸壳，$DT(S)$为S的Delaunay三角剖分，$V(S)$为S的所有强可见点对的集合．

引理1

$$V(S)=\bigcap_{T(S)\subset J(S)} T(S).$$

证明见[3].

引理2

$$|T(S)|=3n-3-|CH(S)|.$$

证明 由于$T(S)$由$2n-|CH(S)|-2$个三角形组成，由平面欧拉公式，引理即证．

由平面点集强可见点对的定义，我们可以很自然地得到一个$O(n^4)$时间计算$V(S)$的算法，因为两个端点都在S中的线段的个数为$O(n^2)$，对每一个这样的线段确定它是否在$V(S)$中至多需要$O(n^2)$时间(确定二线段是否相交的计算时间为常数)，于是$O(n^4)$时间可生成$V(S)$. 由引理1，$V(S)$为S的所有三角剖分的交集，由此可以设计一个$O(n^3)$时间的算法来生成$V(S)$. 首先，我们构造S的Delaunay三角剖分$DT(S)$，这一构造过程可以在$O(n\log n)$时间和$O(n)$存储空间内完成[1]. 由于$V(S)\subseteq DT(S)$，所以仅需验证$DT(S)$中的线段是否在$V(S)$中即可．由引理2，$DT(S)$中线段的个数为不多于$3n$，于是可以设计一个$O(n^3)$的算法生成$V(S)$. 为了设计生成$V(S)$的快速算法．我们证明如下引理．

引理3 确定端点在S中的一个线段是否属于$V(S)$可在$O(n\log n)$时间与$O(n)$存储空间内完成．

证明 令$p,q\in S$，以p,q为端点的线段记为$L(p,q)$. 首先变换点p为原点，q在x轴上，记其坐标为$(x^*,0)$，$x^*>0$，这一步可在$O(n)$时间内完成．在新的坐标系下S变换为S'，$p\to p'$，$q\to q'$且$p'=(0,0)$，$q'=(x^*,0)$. 如果S'中没有位于x轴下方(或上方)的点，则不存在端点都在S'中与$L(p',q')$相交的线段，如果存在点属于S'满足$y(p_i)>0$，$y(p_j)<0$，p_i，$p_j\in S'$，且$p=(x(p),y(p))$，我们可将S'以x轴分成两个子集

$$S'_+=\{p|y(p)>0,p\in S'\},$$
$$S'_-=\{p|y(p)<0,p\in S'\}.$$

此步骤可在$O(n)$时间内完成．为讨论方便，可假设在S'中除p',q'外不存在点p满足$x(p)=0$或$x(p)=x^*$，于是可进一步将S'_+与S'_-分为$S'_+(+1)$，$S'_+(0)$，$S'_+(+1)$与$S'_-(-1)$，$S'_-(0)$，$S'_-(+1)$如下

$$S'_+(-1)=\{p|x(p)<0,\quad p\in S'_+\},$$
$$S'_+(0)=\{p|0<x(p)<x^*,\quad p\in S'_+\},$$

$$S'_+(+1)=\{p\,|\,x(p)>x^*,\quad p\in S'_+\},$$
$$S'_-(-1)=\{p\,|\,x(p)<0,\quad p\in S'_-\},$$
$$S'_-(0)=\{p\,|\,0<x(p)<x^*,\quad p\in S'_-\},$$
$$S'_-(+1)=\{p\,|\,x(p)>x^*,\quad p\in S'_-\}.$$

且有

$$S'_+=S'_+(-1)\cup S'_+(0)\cup S'_+(+1),$$
$$S'_-=S'_-(-1)\cup S'_-(0)\cup S'_-(+1).$$

以上集合分析的过程显然可在 $O(n)$ 时间内完成．如图 1，(a) 所示，如 $S'_+(0)\neq\varnothing$，且 $S'_-(0)\neq\varnothing$（$\varnothing$ 表示空集），那么存在一个端点在 $S'_+(0)$ 另一个端点在 $S'_-(0)$ 中的线段与 $L(p,q)$ 相交，[见图 1，(b)]. 确定 $S'_-(0)$ 与 $S'_+(0)$ 是否为空，仅需 $O(n)$ 时间．于是不失一般性，可假设 $S'_+(0)=\varnothing$. 其次，将 $S'_+(-1)$ 与 $S'_+(+1)$ 中的点取坐标原点为原点按极坐标的极角进行排序，在极坐标系内，$S'_+(+1)$ 为 $S'_+(+1)_{p'}$，$S'_+(-1)$ 为 $S'_+(-1)_{p'}$，类似地可将

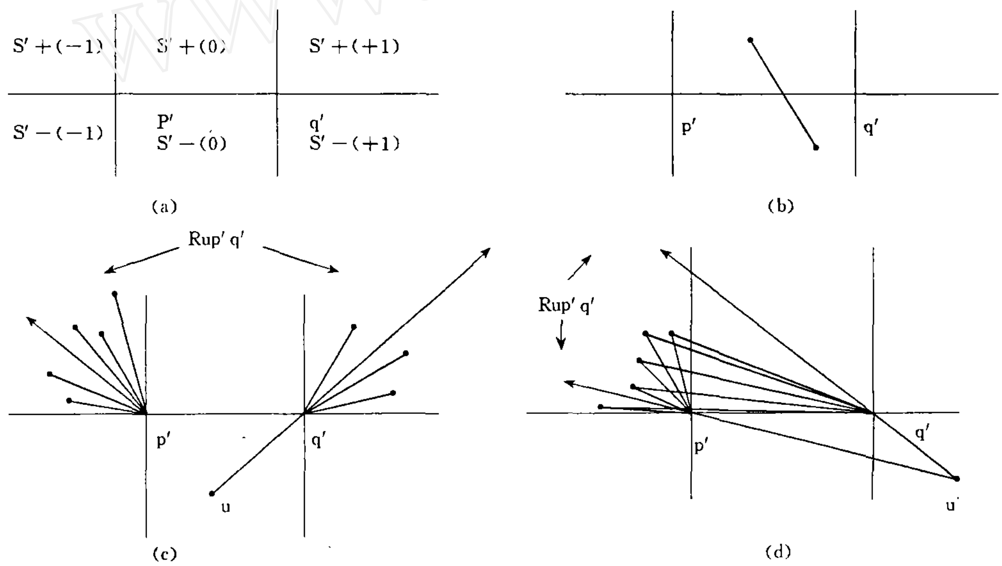

图 1

$S'_+(+1)$ 与 $S'_+(-1)$ 以 q' 为极坐标的原点进行排序进而得到 $S'_+(+1)_{q'}$，$S'_+(1)_{q'}$.

令 $|S'_+(+1)|=m_1$，$|S'_+(-1)|=m_2$，$\alpha_{p'}(p)$ 表示点 p 以 p' 为原点的极坐标的极角，$\alpha_{q'}(p)$ 为点 p 以 q' 为原点的极坐标的极角．于是有

$$S'_+(+1)_{p'}=\{p_i^+\,|\,\alpha_{p'}(p_{i+1}^+)>\alpha_{p'}(p_i^+),\quad i=1,2,\cdots,n_1-1\},$$
$$S'_+(+1)_{q'}=\{q_i^+\,|\,\alpha_{q'}(q_{i+1}^+)>\alpha_{q'}(q_i^+),\quad i=1,2,\cdots,m_1-1\},$$
$$S'_+(-1)_{p'}=\{p_i^-\,|\,\alpha_{p'}(p_{i+1}^-)>\alpha_{p'}(p_i^-),\quad i=1,2,\cdots,m_2-1\},$$
$$S'_+(-1)_{q'}=\{q_i^-\,|\,\alpha_{q'}(q_{i+1}^-)>\alpha_{q'}(q_i^-),\quad i=1,2,\cdots,m_2-1\}.$$

如上的排序过程可在$O(n\log n)$时间内完成[4].

令$u\in S'_-$，如下分三种情形讨论是否存在一个以u为一个端点，另一个端点在S'_+中的线段与$L(p',q')$相交.

情形1 $u\in S'_-(0)$.

构造两条射线up'与uq'，令$\alpha_{up'}$与$\alpha_{uq'}$分别为up'与uq'在以原点p'和原点q'的极坐标下的极角．将$\alpha_{up'}$插入$S'_+(-1)q'$，我们可以用$O(\log n)$时间确定是否在$S'_+(+1)\cup S'_+(-1)$中存在一点在角区域$R_{up'q'}$内[见图1，(c)].

情形2 $u\in S'_-(+1)$.

如同情形1，先构造up'，uq'，且计算$\alpha_{up'}$，$\alpha_{uq'}$．将$\alpha_{up'}$与$\alpha_{uq'}$分别插入$S'_+(-1)_{p'}$与$S'_+(-1)_{q'}$(由于$u\in S'_-(+1)$，所以仅需考虑$S'_+(-1)$中的点)，此插入过程仅需$O(\log n)$时间，于是$O(n\log n)$时间即可判别$S'_+(-1)$中是否存在点在角区域$R_{up'q'}$内．[见图1，(d)].

情形3 $u\in S'_-(-1)$

与情形2完全相同的方法用$O(\log n)$可以判别是否在$S'_+(+1)$中存在点v满足$L(u,v)$与$L(p',q')$相交.

因为$S'(-1)$中点的个数小于n，所以由以上讨论可得，确定是否存在两个端点都在S中的线段与线段$L(p,q)$相交可用至多$O(n\log n)$时间完成，于是引理3得证.

定理 对任简单平面点集S，$|S|=n$，$V(S)$可用至多$O(n^2\log n)$时间与$O(n)$存储空间来求出.

证明 首先构造S的Delaunay三角剖分$DT(S)$，此步在$O(n\log n)$时间与$O(n)$存储空间内完成．其次，判别$DT(S)$中线段端点组成的点对是否属于$V(S)$由引理1，引理2，引理3，可知$V(S)$可在至多$O(n^2\log n)$时间和$O(n)$空间内完成.

2 结　论

有限平面点集强可见点对及其应用是在文献[3]中提出的，关于求所有可见点对的算法，[3]中指出该问题时间固有复杂度的下界为$O(n\log n)$，显然本文的主要定理所给出的时间复杂性与[3]中所指出的下界是有很大距离的．如何进行该问题更好的快速算法设计以及提高其复杂度下界是一个有待进一步深入研究的课题.

参 考 文 献

1 Preparata, F. and Shamos, M. I., Computational Geometry-An Introduction, Springer-Verlag, 1985.

2 Lee, D. T. and Preparata, F., Computational Geometry-a Survey, IEEE Transactions on Computers, C-33(1984), No. 12, 1072-1101.

3 徐寅峰，平面点集的最小权三角剖分问题，博士论文，中国科学院应用数学研究所，1992.

4 Aho, A. V. Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D., Data Structures and Algorithms, Addison Wesley Publishing Company, 1983.